

MA-1121—Segundo Parcial, Septiembre - Diciembre 2001 —

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.

1. Considere los rectángulos inscritos en un semicírculo de radio $r > 0$, que tienen un lado sobre el diámetro.
Demuestre que hay entre ellos uno y sólo uno que tiene área máxima. Hállelo.

2. Considere la función

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

- a) Describa sus intervalos de monotonía.
b) Examine la concavidad-convexidad y posibles inflexiones.
c) Halle extremos locales y/o absolutos.
d) Estudie el comportamiento para $x \rightarrow \pm\infty$.
e) Dibuje una gráfica de f que refleje las observaciones anteriores.

3. Calcule

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

Nota: Puede aprovechar el resultado de a) para b).

4. Dado el número x , demuestre que existe un número ξ entre 0 y x tal que

$$\sin x = x - \frac{x^2}{2} \sin \xi$$

Concluya que $\sin 0,01 = 0,010$ es correcto hasta el tercer decimal.

Sugerencia: Ponga $f(x) = \sin x - x$, $g(x) = x^2$. Aplique el teorema de los incrementos finitos de Cauchy a f y g en el intervalo entre 0 y x . ¡Pero deberá hacerlo dos veces!